**Определения вероятности**

**Статистическое определение вероятности**

***Статистической вероятностью*** события *А* называется относительная частота появления этого события в n произведенных испытаниях, т.е.



где  - статистическая вероятность события *А*;

*W(A) –* относительная частота события *А*;

*m* – испытаний, в которых появилось событие *А*;

*n* – общее число испытаний.

**Пример 1.** Среди 4000 первых чисел натурального ряда имеется 551 простое число. Найти частоту появления простого числа.

**Решение.** *W(A)*= 551/4000.

В отличие от «математической» вероятности *Р(А)*, статистическая вероятность является характеристикой *опытной, экспериментальной*.

**ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

1. Отдел технического контроля обнаружил пять бракованных книг в партии из случайно отобранных 100 книг. Найти относительную частоту появления бракованных книг.

2. По цели произведено 20 выстрелов, причем зарегистрировано 18 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.

3. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0.9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

Ответы: **1.** 0,05; **2.** 0.9; **3.** 180.

**Геометрическое определение вероятности**

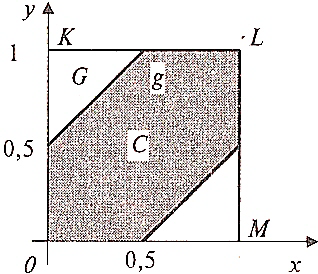
***Геометрической вероятностью*** события *А* называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события *А*, к мере всей области, т.е.

.

**Пример 2.** Два лица – А и В условились встретиться в определенном месте, договорившись только о том, что каждый является туда в любой момент времени между 11 и 12 ч. и ждет в течение 30 мин. Если партнер к этому времени еще не пришел или уже успел уйти, встреча не состоится. Найти вероятность того, что встреча состоится.

**Решение.** Обозначим моменты прихода в определенное место лиц А и В соответственно через x и y. В прямоугольной системе координат Oxy возьмем за начало отсчета 11 ч., а за единицу измерения – 1ч. По условию  Этим неравенствам удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей квадрату OKLM со стороной, равной 1. Событие С – встреча двух лиц – произойдет, если разность между *x* и *y* не превзойдет 0,5 ч, т.е. 

Решение последнего неравенства есть полоса, которая внутри квадрата представляет заштрихованную область g.



По формуле



так как площадь области g равна площади квадрата G без суммы площадей двух угловых треугольников.

**ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

1. На отрезок *ОА* длины *L* числовой оси *Ох* наудачу поставлена точка *В(х).* Найти вероятность того, что меньший из отрезков *ОВ* и *ВА* имеет длину, меньшую, чем *L/3.* Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

2. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в квадрат пропорциональна площади квадрата и не зависит от его расположения относительно круга.

3. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 15 мин., после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода.

Ответы: **1.** 2/3; **2.** ; **3.** 7/16

**КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ**

Вероятность – одно из основных понятий теории вероятностей.

Численная мера степени объективной возможности наступления события называется ***вероятностью события***.

Согласно классическому определению ***вероятность*** ***события*** *А* равна отношению числа случаев, благоприятствующих ему, к общему числу случаев, т.е.

*Р(А)=m/n,*

где *Р*(А) – вероятность события *А*; *m* – число случаев, благоприятствующих событию *А*; *n* – общее число случаев.

Случай называется ***благоприятствующим*** событию *А*, если появление этого случая влечет за собой появление события *А*

Предполагается, что элементарные исходы образуют полную группу и равновозможны.

***Вероятность достоверного события равна единице.***

***Вероятность невозможного события равна нулю.***

***Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.***

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству

.

**Пример 3.** В урне находится 2 белых и 3 черных шара. Из урны наугад вынимается один шар. Требуется найти вероятность того, что этот шар будет белым.

**Решение.** Обозначим *А* событие, состоящее в появлении белого шара. Общее число случаев *n=5*; число случаев, благоприятных событию *А, m=2*. Следовательно,

*Р(А)=2/5.*

**Пример 4.** При бросании игральной кости возможны шесть исходов – выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Какова вероятность появления четного числа очков?

**Решение.** Все *n=6* исходов образуют полную группу событий и равновозможны. Событию *А* – “появление четного числа очков” благоприятствуют 3 исхода (случая) – 2, 4 и 6 очков. Следовательно,

*Р(А)=3/6=1/6.*

**Пример 5.** Буквы Т, Е, И, Я, Р, О написаны на отдельных карточках. Ребенок берет карточки в случайном порядке и прикладывает одну к другой: а) 3 карточки; б) все 6 карточек. Какова вероятность того, что получится слово: а) «ТОР»; б) «ТЕОРИЯ»?

**Решение.** а) Пусть событие *А* – получение слова «ТОР». Различные комбинации трех букв из имеющихся шести представляют размещения, так как могут отличатся как составом, так и порядком букв, т.е. общее число случаев , из которых благоприятствует событию *А* *m*=1 случай. По формуле

**

б) Пусть событие *В* - получение слова «**ТЕОРИЯ**». Различные комбинации шести букв из имеющихся шести представляют собой перестановки, так как отличаются только порядком сле­дования букв; т.е. общее число случаев *п* = *Р6* = 6!, из которых благоприятствует событию *В т=*1случай. Поэтому

**

**Пример 6.** Найти вероятность того, что получится слово «АНАНАС», если на от­дельных карточках написаны три буквы А, две буквы Н и одна буква С.

**Решение.** Пусть событие *В* - получение слова «АНАНАС». Так же, как и в предыдущем примере,общее число случа­ев *n* = *Р6* = 6!, но теперь число случаев *т,* благоприятствующих событию *В,* существенно больше, так как перестановка трех букв А, осуществляемая *Р3=*3!способами, и перестановка двух букв Н *(Р2* = 2! способами) не меняет собранное из карточек слово «АНАНАС»; по правилу произведения *.*

Итак,



(Задачу можно решить и иначе, рассматривая комбинации букв как перестановки с повторениями, из которых событию *В* благоприятствует 1 комбинация:

*Р(В)* = 1 : Р6(3;2;1)= 1/60

**Пример 7.** Из 30 студентов 10 имеют спортивные разряды. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 студента - разрядники?

**Решение.** Пусть событие *А* - 3 выбранных наудачу студента - разрядники. Общее число случаев выбора 3 студентов из 30 равно так как комбинации из 30 студентов по 3 представляют собой сочетания, ибо отличаются только составом студентов. Точно так же число случаев, благоприятствующих событию *А,* равно *.* Итак,



**Пример 8.** В лифт на l-м этаже девятиэтажного дома вошли 4 человека каждый из которых может выйти независимо друг от друга на любом этаже с 2-го по 9-й. Какова вероятность того, что все пассажиры выйдут: а) на 6-м этаже; б) на одном этаже?

**Решение.** а) Пусть событие *А* - все пассажиры выйдут на 6-м этаже. Каждый пассажир может выйти со 2-го по 9-й этаж 8 способами. По правилу произведения общее число спо­собов выхода четырех пассажиров из лифта равно . Число случаев, благоприятствующих событию *А,* равно *т=*1*.* Таким образом,

.

б) Пусть событие *В* - все пассажиры выйдут на одном эта­же. Теперь событию *В* будут благоприятствовать *т=*8случаев (все пассажиры выйдут или на 2-м этаже, или на 3-м,..., или на 9-м этаже). Поэтому



(Общее число способов выхода пассажиров из лифта можно найти иначе, если учесть, что комбинации номеров этажей, на которых может выйти из лифта каждый из четырех пассажиров, например, 3456, 4356, 4433, 5666, 5555, 9785 и т.д., представляют собой размещения с повторениями из 8 элементов (этажей) по 4. Их число по формуле равно ).

**Пример 9.** По условиям лотереи «Спортлото 6 из 45» участник лотереи, угадавший 4, 5, 6 видов спорта из отобранных при случайном розыгрыше 6 видов спорта из 45, получает де­нежный приз. Найти вероятность того, что будут угаданы: а) все 6 цифр; б) 4 цифры.

**Решение.** а) Пусть событие *А* - угадывание всех 6 видов спорта из 45. Общее число всех случаев, т.е. всех вариантов за­полнения карточек спортлото, есть *,* так как каждый вари­ант заполнения отличается только составом видов спорта. Число случаев, благоприятствующих событию *А,* есть *т=* 1. Поэтому

.

б) Пусть событие *В* - угадывание 4 видов спорта из 6 выигравших из 45. Вначале найдем число способов, какими можно выбрать 4 вида спорта из 6 выигравших, т.е. . Но это еще не все: к каждой комбинации 4-х выигравших видов спорта из 6 следует присоединить комбинацию 2-х невыигравших видов из 45-6=39; таких комбинаций .По правилу произведения общее число случаев, благоприятствующих событию *В,* равно  Итак,



**Пример 10.** В партии 100 изделий, из которых 4 - бракованные. Партия произвольно разделена на две равные части, которые отправлены двум потребителям. Какова вероятность того, что все бракованные изделия достанутся: а) одному потребителю: б) обоим потребителям поровну?

**Решение.** а) Пусть событие *А* - все бракованные изделия достанутся одному потребителю. Общее число способов, какими можно выбрать 50 изделий из 100, равно . Событию *А* благоприятствуют случаи, когда из 50 изделий, отправленных одному потребителю, будет либо 46 стандартных из 96 (и все 4 бракованных) изделий, либо 50 стандартных из 96 (и 0 бракованных); их число *.* Поэтому



б) Пусть событие *В* - в каждой партии по 2 бракованных изделия. Теперь событию *В* будут благоприятствовать случаи, когда из 50 изделий, отправленных одному потребителю, будут 48 стандартных из 96 и 2 бракованных из 4, их число *.* Поэтому



**Пример 11.** В магазине было продано 21 из 25 холодильников трех марок, имеющихся в количествах 5, 7 и 13 штук. Полагая, что вероятность быть проданным для холодильника каждой марки одна и та же, найти вероятность того, что остались нераспроданными холодильники: а) одной марки; б) трех разных марок.

**Решение.** а) Пусть событие *А* - остались нераспроданными холодильники одной марки. Общее число способов, которыми можно получить 4 (непроданных) холодильника из 25, равно *.* Число способов, которыми можно получить 4 холодильника первой марки из 5, равно *;* второй марки из 7 - и третьей марки из 13 -  Событию *А* по правилу суммы благоприятствует *т* = *т1+т2+т3* случаев. Поэтому



б) Пусть событие *В* - остались нераспроданными холодильники трех разных марок. Событие *В* может произойти по одному из трех вариантов. По первому варианту событие *В* произойдет, если останутся нераспроданными 1, 1, 2 холодильников соответственно l-й, 2-й и 3-й марок; по второму варианту - 1, 2, 1 и по третьему варианту останутся нераспроданными 2, 1, 1 холодильников соответственно l-й, 2-й и 3-й марок. Так как до продажи имелось 5 холодильников 1-й марки, 7 - 2-й и 13 холодильников 3-й марки, то по правилу произведения число случаев, благоприятствующих первому варианту, равно ; *в*торому -; третьему варианту - . Общее число случаев, благоприятствующих событию *В,* равно *т* = *т1+т2+т3 .* Теперь



**ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

1. Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется: а) случайно названное двузначное число; б) случайно названное двузначное число, цифры которого различны.

2. Брошены две игральные кости; найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 3*.*

3. Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) сумма выпавших очков равна семи; б) сумма выпавших очков равна восьми, а разность – четырем.

4. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

5.Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится «герб».

6. В коробке шесть одинаковых, занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

7. Найти вероятность того, что при бросании игральных костей шестерка выпадет на одной (безразлично какой) кости, если на гранях двух других костей выпадут числа очков, не совпадающие между собой (и не равные шести).

8. В пачке 20 перфокарт, помеченных номерами 101, 102, ..., 120 и произвольно расположенных. Перфораторщица наудачу извлекает две карты. Найти вероятность того, что извлечены перфокарты с номерами 101 и 120.

9. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

10. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

11. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

12. Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

13. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

14. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

15. На складе имеется 15 кинескопов, причем 10 из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу кинескопов окажутся три кинескопа Львовского завода.

16. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

Ответы: **1.** а)1/90; б)1/81. **2.** 1/18. **3.** а)1/6; б)1/18. **4.** а)0,384; б)0/096; в)0/008. **5.** 3/4. **6.** 1/720. **7.** 0,5. **8.** 1/190. **9.** 24/91. **10.** 0,1. **11.** а)****0,65; б)****0,00005. **12.** 0,3. **13.** 1/720. **14.** 0,5. **15. **0,4. **16.** 14.55.