**ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ**

При непосредственном вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики. Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества.

В основе решения задач на комбинаторику лежат два важных правила.

**1)** **Правило сложения.** Если некоторый элемент *А* можно выбрать *m* способами, а другой элемент *В – n* способами, исключающими друг друга, то выбор какого-нибудь одного из этих элементов (либо *А*, либо *В*) можно осуществить *m + n* способами.

**2) Правило умножения.** Если элемент *А* можно выбрать *m* способами и если после каждого такого выбора элемент *В* можно выбрать *n* способами, то выбор пары элементов (*А*, *В*) в указанном порядке можно осуществить ** способами.

**Пример 1.** В ящике 300 деталей. Известно, что 150 из них – 1-го сорта, 120 – 2-го, а остальные – 3-го сорта. Сколько существует способов извлечения из ящика одной детали 1-го или 2-го сорта?

**Решение.** Деталь 1-го сорта может быть извлечена *n1*=150 способами, 2-го сорта – *n2*=120 способами. По правилу суммы существует *n1+n2*=150+120=270 способов извлечения одной детали 1-го или 2-го сорта.

**Пример 2.** В группе 30 человек. Необходимо выбрать старосту, его заместителя и профорга. Сколько существует способов это сделать?

**Решение.** Старостой может быть выбран любой из 30 студентов, его заместителем – любой из оставшихся 29, а профоргом – любой из оставшихся 28 учащихся, т. е. *n1*=30, *n2*=29, *n3*=28. По правилу произведения общее число способов выбора старосты, его заместителя и профорга равно *n1n2n3* = =24360 способов.

**Пример 3.** Сколько трехзначных и четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если каждая цифра при составлении числа используется не более одного раза?

**Решение.** По правилу умножения четырехзначное число можно составить = 24 способам, трехзначное число = 24 способами. Тогда выбор либо трехзначного, либо четырехзначного числа может быть осуществлен по правилу сложения 24+24 = 48 способами. Таким образом, общее количество трехзначных и четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, используя при составлении числа каждую цифру не более одного раза, равно 48.

**ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

1. Из пункта *А* в пункт *В* ведут 3 дороги, а из пункта *В* в пункт *С* – 4 дороги. Сколькими способами можно совершить поездку из *А* в *С* через *В*?

2. На школьном вечере присутствуют 14 девушек и 17 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них пару для танца?

3. В забеге участвуют 5 спортсменов. Сколькими способами могут распределиться места в результате забега?

4. В урне содержится 3 синих, 5 красных и 2 белых шара. Сколькими способами можно вытащить из урны либо два белых шара, либо два цветных шара, из которых один синий, а другой – красный?

5. В книге из 20 страниц на каких–либо трех страницах надо поместить по одной иллюстрации. Сколькими способами это можно сделать?

6. Имеется 6 различных конвертов без марок, 4 различные марки и 3 различных конверта с марками. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для отправки письма?

**перестановки**

***Перестановками*** из *n* различных элементов называются всевозможные группы из этих n элементов, отличающиеся друг от друга только порядком элементов.

***Число перестановок*** из *n* различных элементов ***без повторений*** определяется по формуле

*Pn = n!* (1)

***Число перестановок*** из *n* различных элементов ***с повторениями***, которые можно сделать из *k1* элементов первого типа, *k2* элементов второго типа, …, *kn* элементов *n*-го типа, находятся по формуле

**** (2)

**Пример 4.** Порядок выступления 7 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?

**Решение.** Каждый вариант жеребьевки отличается только порядком участников конкурса, т. е. является перестановкой из 7 элементов. Их число определяется по формуле (1):

*P*7 = 7! = = 5040.

**Пример 5.** Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, если каждая цифра в изображении числа встречается один раз?

**Решение.** Рассматриваемое четырехзначное число может быть представлено как некоторая перестановка из цифр 0, 1, 2, 3, в которой первая цифра отлична от нуля. Так как число перестановок из четырех цифр равно *P*4 = 4! и из них 3! перестановок начинаются с нуля, то искомое количество равно:

4! – 3! = 18.

**Пример 6.** Сколькими способами можно нанизать на нить 4 зеленых, 5 синих и 6 красных бус?

**Решение.** Речь идет об отыскании числа перестановок с повторениями, которые можно сделать из *k1* = 4 элементов первого типа (зеленых бус), *k2* = 5 элементов второго типа (синих бус) и *k3* = 6 элементов третьего типа (красных бус). По формуле (2) получаем

.

**Пример 7.** Сколько существует семизначных чисел, состоящих из цифр 4, 5 и 6, в которых цифра 4 повторяется 3 раза, а цифры 5 и 6 – по 2 раза?

**Решение.** Каждое семизначное число отличается от другого порядком следования цифр (причем n1 = 3, n2 = 2, n3 = 2, а их сумма равна 7), т.е. является перестановкой с повторениями из 7 элементов. Их число по формуле (2):



**ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

1. Сколько перестановок можно сделать из букв слова: а) врач; б) папа?

2. Сколько различных шестизначных чисел, начинающихся цифрой 2 и оканчивающихся цифрой 5, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что каждая цифра в обозначении числа встречается один раз?

3. Сколько различных восьмизначных чисел можно получить, используя в их написании цифру 1 два раза, а цифры 2 и 3 – по три раза?

4. Энциклопедия состоит из 8 томов – с первого по восьмой. Сколькими способами ее можно поставить на полке в беспорядке, т.е. так, чтобы тома не следовали один за другим в порядке их номеров?

5. Пассажирский поезд состоит из трех багажных вагонов и восьми купированных. Сколькими способами можно сформировать состав, если багажные вагоны должны находиться в его начале?

6. Сколькими способами можно посадить за круглый стол трех мужчин и трех женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

**Размещения**

***Размещениями*** из *n* различных элементов по *k* называются всевозможные группы, содержащие *k* элементов, взятых из данных *n* элементов, и отличающиеся друг от друга или составом элементов, или их порядком.

***Число размещений*** из *n* различных элементов по *k* ***без повторений*** определяется по формуле

. (3)

***Число размещений*** из *n* различных элементов по *k* ***с повторениями*** находится по формуле

. (4)

**Пример 8.** В местком избрано 6 человек. Из них надо выбрать председателя и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

**Решение.** Задача сводится к нахождению числа размещений из шести элементов по два, так как здесь существенно и то, кто будет выбран в руководство месткома, и то, как распределятся обязанности между ними. Таким образом, искомое число по формуле (3) равно



**Пример 9.** Расписание одного дня состоит из 5 уроков. Определить число вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин.

**Решение.** Каждый вариант расписания представляет набор 5 дисциплин из 11, отличающихся от других вариантов как составом дисциплин, так и порядком их следования, т.е. является размещением из 11 элементов по 5. Число вариантов расписаний, т.е. число размещений из 11 элементов по 5, находим по формуле (3)



**Пример 10.** Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

**Решение.** Каждое трехзначное число, составленное из указанных цифр, можно рассматривать как размещение с повторениями, составленное из трех цифр, взятых из данных семи. Поэтому искомое число найдем по формуле (4)



**ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

1.Студенту необходимо сдать 5 экзаменов в течение 12 дней. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов?

2. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, …, 9, если каждая цифра в обозначении числа встречается не более одного раза?

3. Сколькими способами можно преподнести 4 различных подарка шести ученикам таким образом, что каждый ученик получил: а) не более одного подарка; б) не более двух подарков?

4. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены различные призы?

5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются всевозможные числа. Каждое из которых содержит три или четыре цифры. Сколько таких чисел можно составить, если повторения цифр в числах запрещены?

6. На складе имеются 5 ящиков с различными фруктами и 3 ящика с различными овощами. Сколькими способами можно каждой из двух овощных палаток выдать по одному ящику с фруктами и овощами?

**СОЧЕТАНИЯ**

***Сочетаниями*** из *n*  различных элементов по *k* называются всевозможные группы, содержащие *k* элементов, взятых из данных *n* элементов, и отличающихся друг от друга по крайней мере одним элементом.

***Число сочетаний*** из *n* различных элементов по *k* ***без повторений*** определяется по формуле

 (5)

Число сочетаний без повторений из *n* различных элементов по *k* равно числу сочетаний из этих же *n* элементов по *n-k*:

 (6)

***Число сочетаний*** из *n* элементов по *k* ***с повторениями*** находится по формуле

 (7)

**Пример 11.** Сколько различных правильных дробей можно составить из чисел 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, берущихся попарно?

**Решение.**  Различных пар из данных чисел, в которых первый элемент меньше второго, будет, очевидно, столько, сколько можно составить сочетаний из семи элементов по два. Отсюда по формуле (5) получаем искомое число

.

**Пример 12.** В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?

**Решение.** Каждая партия играется двумя участниками из 16 и отличается от других только составом пар участников, т.е. представляет собой сочетание из 16 элементов по 2. Их число находим по формуле (5):



**Пример 13.** В кондитерском магазине продаются три сорта пирожных: наполеоны, эклеры и слоеные. Сколькими способами можно купить 9 пирожных?

**Решение.** В задаче требуется найти число всевозможных групп по 9 элементов, которые можно составить из данных элементов, причем указанные элементы в каждой группе могут повторяться, а сами группы отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Это задача на отыскание числа сочетаний с повторениями из трех элементов по девять. Следовательно, по формуле (7) получим



**ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

1. Сколькими способами из десяти человек можно избрать комиссию, состоящую из четырех членов?

2. Сколько прямых можно провести через 8 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

3. В киоске продается мороженое 6 сортов. Сколькими способами можно купить 10 мороженых?

4. Лифт 16-ти этажного дома поднимает с первого этажа 10 человек. Сколькими способами может распределиться между этажами количество человек, вышедших на каждом этаже?

5. Сколькими способами можно 5 одинаковых предметов распределить между тремя лицами?

6. Сколько различных вариантов хоккейной команды можно составить из 8 нападающих, 5 защитников и 2 вратарей, если в состав команды должны войти 3 нападающих, 2 защитника и 1 вратарь?